Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1/3
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Midtoets Complex
Postcode en		Datum: 05-6-'07
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

1) $f(z) = |z^2 - z|$, $z = x + iy$

Is deze functie diff. baar?

Voor differentieerbaarheid geldt

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

En dat aan Cauchy-Riemann wordt voldaan.
Deze formule kunnen we nu invullen =>

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|(z + \Delta z)^2 - (z+\Delta z)| - |z^2 - z|}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z^2 + 2\Delta z \cdot z + \Delta z^2 - z - \Delta z| - |z^2 - z|}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z^2| + |2\Delta z \cdot z| + |\Delta z^2| - |z| - |\Delta z| - |z^2| + |z|}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|2\Delta z \cdot z| + |\Delta z^2| - |\Delta z|}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z (\Delta z + 2z - 1)}{\Delta z}$$

$= \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z + 2z - 1 = 2z - 1$. Dus de functie kan diff. baar als aan Cauchy-Riemann wordt voldaan

Als $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

Dat betekent dat $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, en $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$f(z) = |z^2 - z| = |(x+iy)^2 - (x+iy)| = |x^2 + 2ixy - y^2 - x - iy|$

$= |x^2 - y^2 - x + i(2xy - y)|$

$= \sqrt{(x^2-y^2-x)^2 + (2xy-y)^2}$

Dit betekent dat $u = \sqrt{(x^2-y^2-x)^2 + (2xy-y)^2}$ en $V = 0$

$V = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Riemann vergelijking wordt voldaan als

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

10 $u = \sqrt{(x^2 - y^2 - x)^2 + (2xy - y)^2}$

Omdat u een samenstelling van een polynoom en een wortelfunctie is, is goed te zien dat $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ alleen voor $x = y = 0$.

Dus de functie $f(z) = |z^2 - z|$ is alleen diff.baar in het punt $z = 0$

(2) $z^{1+i} = e^{(1+i)\cdot \log z}$

De principal branch van $\log z$ gaat van $-\pi$ naar π: $[-\pi, \pi)$

$\Rightarrow$ hoek in de principal branch.

Dan $\log z = \text{Log}\,|z| + \text{Arg}\,z$

Verder geldt

$$\frac{d}{dz}\left(e^{(1+i)\cdot \log z}\right) = e^{(1+i)\cdot \log z} \cdot \frac{1+i}{z} = 1+i\left(\cdot \frac{z^{1+i}}{z}\right)$$

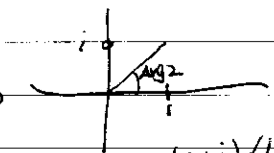
$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\left(e^{(1+i)\cdot(\log z)}\right) = 1+i\left(\frac{z^{1+i}}{z}\right) = (1+i)\cdot z^{i}$$

In het punt $z = i$ geldt dan

7 $$\frac{d}{dz}\left(e^{(1+i)(\log z)}\right) = (1+i)\cdot i^{i}$$

En omdat in de principal branch $\log z = \text{Log}\,|z| + \text{Arg}\,z$

Met $|z| = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

En $\text{Arg}\,z \Rightarrow$  $\Rightarrow \text{Arg}\,z = \frac{1}{4}\pi$

$\cancel{\Rightarrow (1+i)\, i^i = (1+i)\, e^{(1+i)(\text{Log}\sqrt{2})}\, e^{(1+i)\frac{1}{4}\pi}}$

Zie volgend bloadje

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3/3
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Complex
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

Vervolg (2)

Dan geldt dus

$$(1+i)\cdot i^{i} = (1+i)\,e^{(1+i)(\text{Log}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\pi)}$$

Dus

$$\frac{d}{dz} z^{1+i} = (1+i)\,e^{(1+i)\text{Log}\sqrt{2}}\cdot e^{(1+i)\cdot\frac{1}{4}\pi}$$

(3) De integraal $\int_\Gamma (|z-1+i|^2 - z)\,dz$

Met gegeven parametrisering $z(t) = 1-i+e^{it}$, $0\le t\le\pi$

~~Voor~~ Er geldt $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z(t))\cdot z'(t)\cdot dt$

~~Als we deze formule invullen krijgen we~~

$$f(z(t)) = |1-i+e^{it}-1+i|^2 - 1+i-e^{it} = |e^{it}|^2 - 1+i-e^{it}$$

Waarbij $|e^{it}|^2 = |\cos t + i\sin t|^2 = (\cos^2 t+\sin^2 t)^2 = 1^2 = 1$

$$\frac{dz}{dt} = ie^{it} \Rightarrow dz = ie^{it}\,dt$$

Als we nu deze formule invullen, krijgen we

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^\pi f(z(t))\cdot z'(t)\,dt = \int_0^\pi (-1+i-e^{it}+1)\cdot ie^{it}\,dt$$

2.0.2.

$\cancel{= e^{i\pi} - e^{i0} = \cos\pi + i\sin\pi - \cos 0 - i\sin 0}$

$\cancel{= -1 + i\cdot 0 - 1 - i\cdot 0}$

$\cancel{= -1 - 1 = -2}$

Dus $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^\pi (1 - 1 + i - e^{it}\,dt)\cdot ie^{it}\,dt$

$= \int_0^\pi (i - e^{it})\cdot ie^{it}\,dt = \int_0^\pi (-e^{it} - ie^{2it})\,dt$

9 $= \left[-\frac{1}{i}e^{it} - \frac{1}{2}e^{2it}\right]_0^\pi \qquad \left(\frac{1}{i} = \frac{i}{ii} = -i\right)$

$= \left[ie^{it} - \frac{1}{2}e^{2it}\right]_0^\pi$

$= \left(i\cdot e^{i\pi} - \frac{1}{2}e^{2i\pi} - ie^{i\cdot 0} + \frac{1}{2}e^{2i\cdot 0}\right)$

$e^{i\cdot 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

$\Rightarrow \left(i\cdot e^{i\pi} - \frac{1}{2}e^{2i\pi} - ie^{i\cdot 0} + e^{2i\cdot 0}\right)$

$= \left(i\cdot -1 - \frac{1}{2}\cdot 1 - i\cdot 1 + \frac{1}{2}\right)$

$= \left(-i - \frac{1}{2} - i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2i$

Dus $\int_\Gamma \left(|z - 1 + i|^2 - 2\right)dz = \frac{1}{2} - 2i$

(4) Cauchy's gegeneraliseerde integraalstelling luidt als volgt

$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$

10 Voor een gesloten kromme Γ met $f(z)$ analytisch in D.

e^{-z} is analytisch op en in de cirkel $|z| = 2$ (gesloten kromme)

Dus de stelling kan toegepast worden.

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3/3
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Midterm Complex
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

Uit de formule weet je dat $z_0 = -1$, $f(z) = e^{-z}$ en $n = 1$)

Dus er geldt (en gesloten kromme $|z| = 2$

$$f'(-1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z+1)^2}\, dz$$

~~(positieve doorlopen, dus geen extra min)~~

~~e^{-z} is analytisch op en in de cirkel $|z|=2$~~

Dus $\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z+1)^2} = f'(-1) \cdot 2\pi i$

$f'(z) = -e^{-z}$

Dus $f'(-1) = -e^{--1} = -e$

Dus $\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z+1)^2} = f'(-1) \cdot 2\pi i = -2\pi i \cdot e$